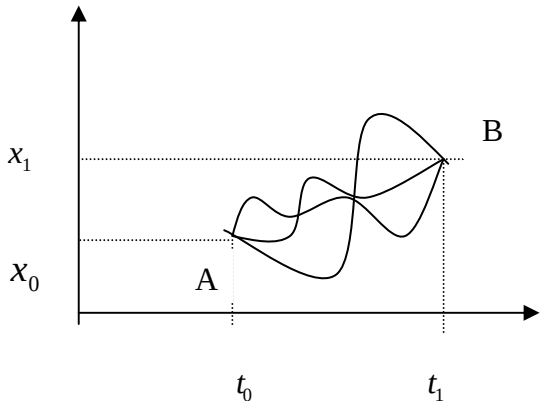
6.2 Úlohy s pevnými koncovými bodmi

Najjednoduchší problém variačného počtu je hľadanie extrémov funkcionálu

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), x'(t)]dt \qquad (6.1)$$

kde $x(t) \in C^2\langle t_0, t_1\rangle$ a

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \qquad (6.2)$$



Budeme predpokladať, že funkcia F vo vzťahu (6.1) má spojité druhé derivácie v oblasti $\langle t_0, t_1\rangle \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$.

Extrém funkcionálu (6.1) budeme hľadať medzi všetkými funkciami $x(t) \in C^1\langle t_0, t_1\rangle$, z množiny M definičného oboru daného funkcionálu (6.1), splňujúcich podmienku (6.2).

Ako sme už ukázali $\delta x = \bar{x}(t) - x(t)$, kde $\bar{x} = \bar{x}(t), x = x(t)$ sú prípustné, blízke krivky. Variácia δx je funkciou premennej t. Potom

$$\delta x' = \bar{x}'(t) - x'(t) = (\delta x)',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\delta x^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} = (\delta x)^{(k)}.$$

Zo vzťahu (4.1) dostávame

$$v[x(t) + \alpha\delta x] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t) + \alpha\delta x, x'(t) + \alpha\delta x']dt \ ,$$

kde α je parameter.

Potom

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} v[x(t)+\alpha\delta x] =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_t \frac{\partial}{\partial\alpha} t + F_x \frac{\partial}{\partial\alpha}[x(t)+\alpha\delta x] + F_{x'} \frac{\partial}{\partial\alpha}[x'(t)+\alpha\delta x'] \right\} dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \{F_x \delta x + F_{x'} \delta x'\} dt = \delta v.$$

Integráciou po častiach dostávame

$$\delta v = [F_{x'} \delta x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right\} \delta x dt.$$

Pretože

$$\delta x|_{t=t_0} = \bar{x}(t_0) - x(t_0) = 0,$$
$$\delta x|_{t=t_1} = \bar{x}(t_1) - x(t_1) = 0,$$

potom

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right\} \delta x dt.$$

Teda nutnou podmienkou existencie extrému daného funkcionálu je splnenie podmienky

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right\} \delta x dt = 0, \qquad (6.3)$$

pričom $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'}$ je na krivke $x = x(t)$ realizujúcej extrém funkcionálu spojitou funkciou a δx nadobúda v hraničných bodoch t_0, t_1 nulové hodnoty.

Platí nasledujúce tvrdenie:

Lema 6.2.1 Ak pre každú spojitú funkciu $b(t)$ je

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t) b(t) dt = 0,$$

kde funkcia $a(t)$ je spojitá v intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$, potom $a(t) \equiv 0$ na intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$.

Vzhľadom na Lemu 6.2.1 a nutnú podmienku (6.3) platí nasledujúca veta.

Veta 6.2.1 *Ak funkcionál (6.1) nadobúda extrém za podmienok (6.2) na krivke* $x = x_0(t)$, *potom funkcia* $x_0(t)$ *je riešenim diferenciálnej rovnice*

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \; t \in \langle t_0, t_1 \rangle.$$

Túto rovnicu nazývame **Eulerovou diferenciálnou rovnicou** pre funkcionál (6.1). Integrálne krivky Eulerovej rovnice t.j. krivky $x = x(t, C_1, C_2)$ sa nazývajú **extremálami funkcionálu** (6.1). Na týchto krivkách funkcionál ale nemusí nadobúdať extrém.

Eulerova rovnica je vo všeobecnosti nelineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu a môžeme ju prepísať do tvaru

$$F_x - F_{tx'} - F_{xx'}x' - F_{x'x'}x'' = 0\,.$$

Extrém funkcionálu (6.1) môže nastať len na riešeniach Eulerovej rovnice, ktoré spĺňajú okrajové podmienky (6.2), teda na extremálach.

Príklad 6.2.1 *Nájdime extremály funkcionálu*

$$v[x(t)] = \int_0^2 [12xt + x'^2]dt\,,$$

pri okrajových podmienkach x(0)=0, x(2)=8.

Riešenie: Eulerova rovnica odpovedajúca danému funkcionálu má tvar

$$x'' - 6t = 0\,.$$

Jej všeobecným riešením je $x = t^3 + C_1 t + C_2$. Vzhľadom na dané okrajové podmienky dostávame $C_1 = 0, C_2 = 0$, to znamená, že extrém daného funkcionálu môže nastať len na krivke $x = t^3$.

Riešenie pomocou MAPLu:

```
> with(VariationalCalculus);
> f := (diff(x(t),t)^2 + 12*t*x(t));
```

$$f := \left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2 + 12\,t\,\mathrm{x}(t)$$

```
> ode1:=EulerLagrange( f, t, [x(t)]);
```

$$ode1 := \{12\,t - 2\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)\}$$

```
> eulrov := dsolve(ode1);
```

$$eulrov := \{\mathrm{x}(t) = t^3 + _C1\ t + _C2\}$$

Riešenie okrajovej úlohy pomocou MATLABu:

```
>> syms x t
>> riesenie=dsolve('D2x-6*t','x(0)=0','x(2)=8','t')
 riesenie =
        t^3
```

Poznámka 6.2.1 *Treba si uvedomiť, že Veta 4.2 nám dáva len nutnú podmienku pre existenciu extrému. Teda na funkcii $x_0(t)$ nemusí mať ešte funkcionál $v[x(t)]$ extrém. Často však existencia funkcionálu vyplýva priamo z fyzikálnej podstaty úlohy. Eulerova rovnica (4.4) je vo všeobecnosti nelineárna diferenciálna rovnica a preto ju nevieme vždy riešiť. Z toho dôvodu nevieme vo všeobecnosti riešiť ani danú variačnú úlohu. Vieme to len v niektorých špeciálnych prípadoch.*